2008-08-03

区分的アファインシステムの適応制御
Adaptive Control of Piecewise Affine Systems

80717798 武藤和夫 (Kazuo Mutoh) Supervisor 佐野昭 (Akira Sano)

1 緒論

ハイブリッドシステムとは，連続ダイナミクス（連続事象）と離散ダイナミクス（離散事象）が同時に存在し，それらの間に相互作用があるシステムのことである．自動車，電気機器，化学プラントなどハイブリッドシステムとして捉えることのできるものは多岐に渡り，私たちの身の周りに数多く存在する．

従来，ハイブリッドシステムの制御に関する研究においては，プラントのパラメータは既知である，すなわちその連続ダイナミクスと離散ダイナミクスは既知であると仮定してきた．しかし，実際には，事前にプラントのパラメータを正確に知ることが難しい場合が多い．したがって，未知のハイブリッドシステムに対する制御手法を構築する必要性がある．

本研究では，ハイブリッドシステムのサブクラスである区分的アファインシステムとして表現することのできるプラントに対して，その連続ダイナミクス・離散ダイナミクスが未知の場合であっても，直接，制御器のパラメータを調整することにより，同定信号の PE 性が満たされない場合であっても，出力追従を達成できる離散時間の制御手法を提案することを目的とする．

2 問題設定

本研究ではプラントは SISO の区分的アファインシステムとして表現されるとする．離散時間の表現では，区分的アファインシステムは式 (1) のように表現される．

$$\begin{cases} x(k+1) = A(i)\,x(k) + B(i)\,u(k) \\ y(k) = C(i)\,x(k) \end{cases} \quad if \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in S_i \qquad (1)$$

ここで，$x(k) \in R^n$ は連続ダイナミクスの状態 (連続状態) を表している．一方，$i = 1, 2, \cdots, m$ は離散ダイナミクスの状態 (離散状態) を，m は離散状態の数を表している．また，$A(i) \in R^{n\times n}$，$B(i) \in R^{n\times 1}$，$C(i) \in R^{1\times n}$ は各離散状態 i に割り当てられた定数行列 (ベクトル) を表す．さらに，$S_i \subseteq R^n \times R^n$ は離散状態 i に対する，入力と出力の集合であり，各々の S_i は境界を除き，他と共通部分を持たない. このモデルでは，各時刻の $(x(k), u(k))$ により離散状態 i が決まり，それに割り当てられた差分方程式に従って解が発展していく．なお，本稿においては，各離散状態に割り当てられた差分方程式として表現される連続ダイナミクスをサブシステムと呼ぶことにする．

式 (1) は伝達関数表現として，以下のようにも書くことができる．

$$y(k) = \kappa_p(i)\,\frac{Z\left(i, q^{-1}\right)}{P\left(i, q^{-1}\right)}u(k) \quad if \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in S_i \qquad (2)$$

ここで，q^{-1} はシフトオペレータを表している．また，$\kappa_p(i) \neq 0 \in R$ であり，$P\left(i, q^{-1}\right)$，$Z\left(i, q^{-1}\right)$ はそれぞれ次数 $n(i)$，$n(i) - n^*(i)$ のモニックな多項式である．$n^*(i)$ は相対次数を表している．

ここで，プラントに関して以下のような仮定をする．

(A1) $Z\left(i, q^{-1}\right)$ は安定多項式である．

(A2) $n(i)$ の上限 n_{max} は既知である．

(A3) $n^*(i)$ は既知で，サブシステムには依らず一定値 $n^*(i) = n^*$ である．

(A4) 離散状態の数 (サブシステムの数)m の最大値 m_{max} は既知である．

(A5) すべての時刻 k において，いずれか 1 つのサブシステムが励起されている．

さらに，状態フィードバック制御に関しては以下のような仮定をする．

(A6) $(A(i), B(i), C(i))$ は可安定・可検出である．

なお，これ以降は，特に断りがない限り，n は n_{max} を，m は m_{max} を表すこととする．

本研究における，制御目的は式 (3) のように定義される規範モデルの出力 $y_M(k)$ にプラント出力 $y(k)$ を追従させることである．

$$y_M(k) = W_M\left(q^{-1}\right) r(k) \qquad (3)$$

ここで，$W_M\left(q^{-1}\right)$ は規範モデルの伝達関数を，$r(k)$ は規範入力を表している．

3 提案手法

3.1 出力フィードバック制御

式 (2) は，i が一定であるとすると，以下のように書き換えることができる．

$$D\left(q^{-1}\right) y(k+n^*) = \kappa_p(i)\,u(k) + \theta_0^T(i)\,\phi_0(k) \qquad (4)$$

ここで，$\theta_0(i) \in R^{2n-1}$，$D\left(q^{-1}\right)$ は任意の次数 n の安定多項式である．$\phi_0(k) \in R^{2n-1}$ は入出力信号で構成されるベクトルで，

$$\phi_0^T(k) = [u(k-1), \cdots, y(k), \cdots, y(k-n+1)]$$

と書ける．式 (4) は式 (2) を非最小実現したシステムである．式 (4) を $u(k-n^*)$ について解くと以下のように変形することができる．

$$u(k-n^*) = \theta^T(i)\,\phi(k) \qquad (5)$$

ここで，$\theta(i) \in R^{2n-1}$，$\phi(k) \in R^{2n-1}$．入力を

$$u(k) = \theta^T(i)\,\phi_M(k+n^*) \qquad (6)$$

とすれば，$D\left(q^{-1}\right)(y(k) - y_M(k)) = 0$ となり，制御目的が達成される．なお，$\phi_M(k+n^*)$ は $\phi(k+n^*)$ の信号の内，$y(k+n^*)$ を $y_M(k+n^*)$ に置き換えたものである．実際には，コントローラのパラメータ $\theta(i)$ は未知であるので，$\theta(i)$ の代わりに，その推定値 $\hat{\theta}(k)$ を用いて入力を計算する．

次に，$\hat{\theta}(k)$ を適応的に調節することを考える．(A5) および式 (5) より，以下の式が成り立つことが分かる．

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\theta^T(i)\,\phi(k) - u(k-n^*)\right) = 0 \qquad (7)$$

式 (7) は多項式の積になっているが，これを展開すると以下のように表せる．

$$h^T\nu(k) + (-u(k-n^*))^m = 0 \qquad (8)$$

ここで，$h \in R^{Mn-1}$ は定数行列，$\nu(k)$ は $\phi(k)$ および $u(k-n^*)$ から計算される信号である．なお，$Mn = {}_{m+K-1}C_m$，$K = 2n+1$ である．式 (8) においてパラメータ h は離散状態

i に依らないことに注意されたい．h の推定値 $\hat{h}(k)$ は，誤差信号 $e(k)$ を以下のように定義すると，

$$e(k) = \hat{h}^T(k)\,\nu(k) + (-u(k-n^*))^m \tag{9}$$

以下のように調整することができる.[1]

$$\hat{h}(k) = \hat{h}(k-1) - \Gamma(k-1)\,\nu(k)\,e(k) \tag{10}$$

ここで，$\Gamma(k) \in R^{Mn-1}$ はパラメータ調節のための適当なゲイン行列である．$\hat{\theta}(k)$ は $\hat{h}(k)$ から以下のようにして計算される．

$$\hat{\theta}(k) = \Pi_K \frac{\Delta\left(\hat{h}^T(k)\,\nu(k) + (-u(k-n^*))^m\right)}{e_K^T \Delta\left(\hat{h}^T(k)\,\nu(k) + (-u(k-n^*))^m\right)} \tag{11}$$

ここで，

$$e_K^T = [0, 0, \cdots, 0, 1] \in R^K, \quad \Pi = [I_{K-1}, \mathbf{0}] \in R^{(K-1)\times K}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \psi(k)}, \quad \psi^T(k) = \left[\phi^T(k), -u(k-n^*)\right]$$

である．$I_K \in R^{K\times K}$ は単位行列を表す．

なお，$n^* \geq 2$ の場合は，サブシステムが切換わる時には，式 (4) は成り立たない．したがって，式 (10) を使って，パラメータの調整をすることができない．対策としては，制御器と同様の機構を持つプラントの同定器を用意し，それによってサブシステムの切換わる時間を検出し，一時的にパラメータの調整を止めるといったことが考えられる．

3.2 状態フィードバック制御

連続状態 $x(k)$ がフィードバックできる場合の制御則を示す．まず，入力 $u(k)$ は以下のように合成されるとする．

$$u(k) = \hat{\kappa_1}^T(k)\,x(k) + \hat{\kappa_2}(k)\,r(k) \tag{12}$$

ここで，$\hat{\kappa_1}(k)$ および $\hat{\kappa_2}(k)$ は，サブシステム i において，閉ループ伝達関数を規範モデルの伝達関数 $W_M\left(q^{-1}\right)$ に一致させる理想的なフィードバックゲイン $\kappa_1^*(i)$，$\kappa_2^*(i)$ の推定値である．

次に，$\hat{\kappa_1}(k)$ および $\hat{\kappa_2}(k)$ の調整方法を示す．サブシステム i において，閉ループ伝達関数を規範モデルの伝達関数に一致させるような理想的な入力を $u^*(i,k)$ とすると，$u^*(i,k)$ は以下のように書ける．

$$u^*(i,k) = \kappa_1^{*T} x(k) + \kappa_2^* r(k) \tag{13}$$

(A5) および式 (13) より，以下の式が成り立つことが分かる．

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\kappa_1^{*T} x(k) + \kappa_2^* r(k) - u^*(i,k)\right) = 0 \tag{14}$$

ところで，

$$u(k) = \kappa_1^T x(k) + \kappa_2 r(k) \tag{15}$$

なる入力をプラントに印加した場合，離散状態 i が一定値だと仮定し，$\kappa_2^*(i) = \kappa_p^{-1}(i)$ の関係を用いて変形すると，以下のような式が成り立つ．

$$u^*(i,k) = u(k) - \kappa_2^*(i)\,W_M^{-1}\left(q^{-1}\right)\epsilon(k+n^*) \tag{16}$$

ここで，$\epsilon(k) = y(k) - y_M(k)$ である．式 (16) を使うと，式 (14) はさらに以下のように変形することができる．

$$\prod_{i=1}^{m}\left\{\left(\kappa_1^{*T} x(k-n^*) + \kappa_2^*\left(r(k-n^*) + W_M^{-1}\left(q^{-1}\right)\epsilon(k)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - u(k-n^*)\right\} = 0 \tag{17}$$

式 (17) は，式 (7) と同様に以下のように変形することができる．

$$h_s^T \nu_s(k) + (-u(k-n^*))^m = 0 \tag{18}$$

ここで，$h_s, \nu_s(k) \in R^{Mn-1}$ である．また，$Mn = {}_{m+K-1}C_m$，$K = n+2$ である．h_s の推定値 $\hat{h}_s(k)$ は，$\hat{h}(k)$ の調整則 (式 (10)) と同様の調整則により，調整することができる．$\hat{\kappa}_1(k)$，$\hat{\kappa}_2(k)$ も $\hat{h}_s(k)$ から同様に計算することができる．

なお，$n^* \geq 2$ の場合，サブシステムが切換わる時に，式 (16) が成り立たないので，式 (10) と同様の調整則は使えない．対策としては，出力フィードバック制御器の場合と同様に，調整則を一時停止するといったことが考えられる．

4 数値例

数値例として，以下のような区分的アファインシステムを考える．

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1.055, & 0.04877 \\ 0.1466, & 0.9084 \end{bmatrix},\ B(1) = \begin{bmatrix} 0.05256 \\ 0.05133 \end{bmatrix}$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} 1.064, & 0.03928 \\ 0.1178, & 0.9701 \end{bmatrix},\ B(2) = \begin{bmatrix} 0.04224 \\ 0.04999 \end{bmatrix}$$

$$C(1) = C(2) = [1, 0]$$

$$n = 2,\ n^* = 1,\ m = 2$$

以下，提案法を適用した場合のシミュレーション結果を示す．

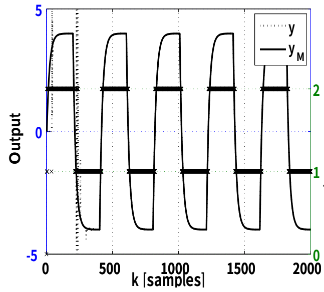

図 1: 出力

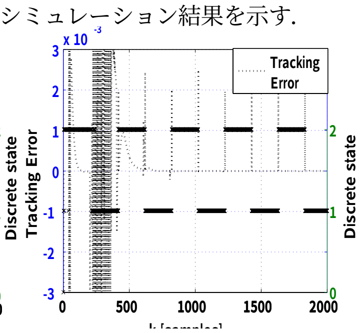

図 2: 追従誤差

出力フィードバック制御

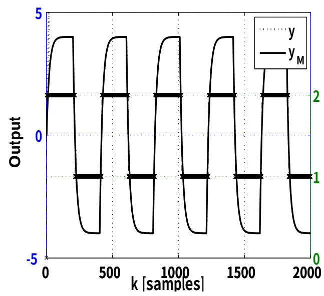

図 3: 出力

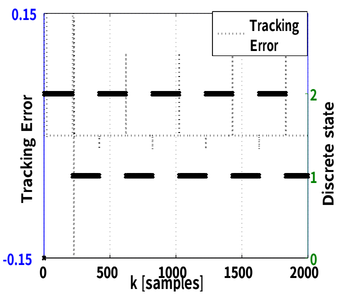

図 4: 追従誤差

状態フィードバック制御

ここで，× は離散状態を表している．出力フィードバック制御・状態フィードバック制御のいずれの場合も，パラメータが収束した後は，離散状態の変化後，速やかに追従誤差をほぼ 0 にすることができることが分かる．

5 結論

区分的アファインシステムで表現されるプラントに対して，その離散ダイナミクスと連続ダイナミクスが未知の場合でも，制御器のパラメータを直接的に調整することにより，同定信号の PE 性が満たされない場合でも，出力追従を可能とする適応制御器を提案した．また，その有効性を数値例によって示した．

参考文献

[1] R. Vidal and Brian D. O. Anderson, "Recursive Identification of Switched ARX Hybrid Models: Exponential Convergence and Persistence of Excitation", 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 1, pp. 32-37, 2004.